长江大学学报（自然科学版） 2008年6月 第5卷 第2期：理工
Journal of Yangtze University (Nat Sci Edit) Jun. 2008, Vol. 5 No. 2: Sci & Eng

估算素数间隙的一个公式

许作铭 （辽宁大学数学学院，辽宁 沈阳 110036）
闫　俐 （中国人民大学信息学院，北京 100872）
罗贵文 （辽宁大学数学学院，辽宁 沈阳 110036）
许作良 （中国人民大学信息学院，北京 100872）

[摘要] 在研究素数分布中，根据素数分布密度把全体正整数划分成无限多个台阶是十分必要的。根据逐步淘汰原则创立了一个新的筛法——$p\#$ 筛法，通过分析 $\pi(x)$ 与诸台阶数字个数平均值的关系，得到了一组递推公式（或称素数分布定理），并利用 $p\#$ 筛法、数论函数、极限存在准则以及等价量的性质等知识给出了素数分布定理的初等证明，进而得到了估算素数间隙的一个公式。

[关键词] 素数；素数定理；素数间隙；台阶系数；$p\#$ 筛法
[中图分类号] O156.1　**[文献标识码]** A　**[文章编号]** 1673-1409 (2008) 02-N008-04
[MR(2000)主题分类号] 11N05

两个相邻素数之间的差，称为素数间隙。如果 Riemann 假设成立，以 p_n 表第 n 个素数，那么，估计与 p_{n+1} 的素数间隙为 $p_{n+1}-p_n \ll p_n^{1/2}\log p_n$。目前最好的结果是由筛法得到的。文献[1]介绍了 Iwaniec 分别与 Jutila、Pintz 证明了 $p_{n+1}-p_n \ll p_n^{13/23-\epsilon}$。文献[2]介绍了楼石拓和姚琪得到 6/11：$p_{n+1}-p_n \ll p_n^{6/11}$。笔者根据逐步淘汰原则创立了一个新的筛法——$p\#$ 筛法，得到了估算素数间隙的一个公式。

1　台阶的划分与 $p\#$ 筛法

定义 1　把小于并最接近 $\sqrt{x}$ 的素数称为方根素数，用 $p(\sqrt{x})$ 表示。

显然，$p(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x}$。

定义 2　令：

$$f(xe) = \prod_{p \leqslant p(xe)} \frac{p-1}{p}$$

称 $p(xe)$ 为台阶素数；$p(xe,-1)$ 为 $p(xe)$ 前面的一个素数；$p(xe,1)$ 为 $p(xe)$ 后面的一个素数。称 $f(xe)$ 为素数的台阶系数，简称台阶系数。显然，$f(xe)$ 具有以下性质[3]：

1) $f(xe)$ 是非负有界函数 $\left(0 < f(xe) \leqslant \frac{1}{2}\right)$。

2) $f(xe)$ 是单调递减函数（$f(xe,1) < f(xe) < f(xe,-1)$）。

3) 当 $x \to \infty$ 时 $f(xe) \to 0$，渐近线为 $f(xe)=0$。$p(\sqrt{x})$ 与 $p(xe)$ 的关系：当 x 较小时，$p(xe) \geqslant p(\sqrt{x})$；在第 7 台阶后 $p(xe) > p(\sqrt{x})$。

定义 3　将正整数集合 $\mathbf{N}^+$ 分成无限个有限数字组成的台阶，每个台阶中的数字具有同一个台阶素数 $p(xe)$，把这些数字称为同一台阶的数。每一个台阶中第一个数称该台阶的首数，用 $a(xe)$ 表示；最后一个数称该台阶的尾数，用 $b(xe)$ 表示。T_k 表示第 k 个台阶。

台阶的划分由台阶系数 $f(xe)$ 来决定。令：

$$b(xe) = b_k = \left[e^{\frac{1}{f(xe)}}\right] = \left[e^{\frac{1}{f_k}}\right] \qquad a_{k+1} = \left[e^{\frac{1}{f(xe)}}\right] + 1 = b(xe) + 1 = b_k + 1$$

则 b_k 为 $p(xe)$ 的台阶尾数；a_{k+1} 为 $p(xe,1)$ 台阶的首数[4]。

[收稿日期] 2008-02-27
[作者简介] 许作铭（1953-），男，1982年大学毕业，副教授，现主要从事素数分布方面的研究工作。

万方数据

定义 4　对任意 $x\in \mathbf{N}^{+}$，$x\in T_n$，$p(xe)=p_n$，把从 1 到 $xp\#=x\times 2\times 3\times 5\times\cdots\times p_n$ 的数依次写下来，分别筛掉所有 p_k（$1\leqslant k\leqslant n$）的倍数，这种筛法称 $p\#$ 筛法或 p（xe）筛法。

显然，把正整数 x 逐次筛分到 p（$\sqrt{x}$）时，[1，x] 区间的数字除 1 以外全部为素数。当继续扩大筛分到 p（xe）$=p_n$ 时，由于 x 个 $p\#$ 区间可以看成 $p\#$ 个 x 区间，所以平均每个 x 区间的数字个数为：

$$x\prod_{p\leqslant p(xe)}\frac{p-1}{p}=xf(xe)$$

2　素数间隙的一个显示公式

首先证明素数分布定理或称不大于 x 的素数个数 $\pi(x)$ 的计算公式[5]。

定理 1(素数分布定理)　对任意 $x\in T_n$，即 $x\in[a_n,b_n]$，恒有：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{xf(xe)}=1\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\pi^{-}(x)}=1\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{\pi^{+}(x)}{\pi(x)}=1\tag{1}$$

其中：

$$\pi^{+}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})f_k+(x-b_{n-1})f_n+0.5$$

$$\pi^{-}(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})f_k+(x-b_{n-1})f_n-0.5n & 1\leqslant n\leqslant 50(\text{令 } b_0=0)\\ \sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})f_k+(x-b_{n-1})f_n-0.25n-12.5 & n\geqslant 51\end{cases}\tag{2}$$

证明　设 $r(x)=\pi^{-}(x)-xf(xe)$，由式(2)得：

$$r(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})f_k+(x-b_{n-1})f_n-0.25n-12.5-xf_n\qquad(n\geqslant 51)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})f_k-b_{n-1}f_n=\sum_{k=1}^{n-1}(f_k-f_{k+1})b_k=\sum_{k=1}^{n-1}\left(f_k-f_k\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}\right)b_k=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f_kb_k}{p_{k+1}}$$

$$\frac{r(x)}{xf_n}=\frac{\pi^{-}(x)-h(x)}{xf_n}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f_kb_k}{p_{k+1}}}{xf_n}=\frac{f_1b_1}{xf_np_2}+\frac{f_2b_2}{xf_np_3}+\frac{f_3b_3}{xf_np_4}+\cdots+\frac{f_{n-1}b_{n-1}}{xf_np_n}\leqslant(n-1)\frac{f_{n-1}b_{n-1}}{xf_np_n}$$

$$\leqslant\frac{(n-1)f_{n-1}}{p_nf_n}=\frac{(n-1)f_{n-1}}{p_nf_{n-1}(p_n-1)/p_n}=\frac{n-1}{p_n-1}\leqslant\frac{n-1}{p_{n-1}}=\frac{\pi(p_{n-1})}{p_{n-1}}$$

显然，当 $n\to\infty$，$x\to\infty$ 时，由文献[6]知 $\frac{\pi(x)}{x}\to 0$，有 $\frac{\pi(p_{n-1})}{p_{n-1}}\to 0$，即 $\frac{r(x)}{xf_n}\leqslant\frac{n-1}{p_{n-1}}\to 0$。

于是 $r(x)=o(xf_n)=o(xf(x))$，即 $xf(xe)\sim\pi^{-}(x)$。

同理可证 $xf(xe)\sim\pi^{+}(x)$。根据极限的夹逼准则[7]、等价量的性质[8] 以及 $p\#$ 筛法，恒有：

$$\pi(x)\sim\pi^{+}(x)\qquad\pi(x)\sim\pi^{-}(x)\qquad\pi(x)\sim xf(xe)$$

因此式(1) 成立。

推论 1(任意两个自然数 x_m 与 x_n 之间的素数个数计算公式)　设 $x_m\in T_m$，$x_n\in T_n$，$n\geqslant m$，则：

$$\Delta\pi(x)\geqslant[x_nf(x_ne)-x_mf(x_me)]\qquad(n>m)$$

$$\Delta\pi(x)\geqslant[x_nf(x_ne)-x_mf(x_ne-1)]\qquad(n=m)\tag{3}$$

或

$$\pi^{-}(x_n)-\pi^{+}(x_m)\leqslant\Delta\pi(x)\leqslant\pi^{+}(x_n)-\pi^{-}(x_m)\tag{4}$$

推论 2(估算素数间隙的显式公式 1)　设 p_n 为第 n 个素数，$p_n\in T_k$，则 p_n 与其相邻的下一个素数 p_{n+1} 的最大间隙：

$$p_{n+1}-p_n<\left[\frac{1}{f(p_ne,1)}+\frac{p_n}{p(p_ne,)-1}\right]=\left[\frac{1}{f_{k+1}}+\frac{p_n}{p_k-1}\right]\tag{5}$$

证明　如果任一素数 p_n 为第 n 个素数 $p_n\in T_k$，则下一个素数为 $p_{n+1}\in T_k$ 或 $p_{n+1}\in T_{k+1}$。

设相邻两个素数之间的间隙为：$d=p_{n+1}-p_n$。

1) 当 p_{n+1}，$p_n\in T_k$ 时 $f(p_{n+1}e,)=f(p_ne,)$由：

万方数据

$$d = p_{n+1} - p_n \qquad p_{n+1} f(p_{n+1}e,) - p_n f(p_n e, -1) \leqslant 1$$

有：
$$d \leqslant \frac{1}{f(p_n e,)} + \frac{p_n f(p_n e, -1)\left(1 - \frac{p_k - 1}{p_k}\right)}{f(p_n e, -1)\frac{p_k - 1}{p_k}} = \frac{1}{f_k} + \frac{p_n}{p_k - 1} < \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k - 1}$$

考虑其实际意义有：$d \leqslant \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,) - 1}\right] = \left[\frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k - 1}\right]$。

2) 当 $p_n \in T_k, p_{n+1} \in T_{k+1}$ 时 $f(p_{n+1}e,) = f(p_n e,1)$ 由：

$$d = p_{n+1} - p_n \qquad p_{n+1} f(p_{n+1}e,) - p_n f(p_n e,) \leqslant 1$$

有：
$$d \leqslant \frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n f(p_n e,)\left(1 - \frac{p_{k+1} - 1}{p_{k+1}}\right)}{f(p_n e,) \times \frac{p_{k+1} - 1}{p_{k+1}}} \leqslant \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_{k+1} - 1} < \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k - 1}$$

考虑其实际意义有：$d \leqslant \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,) - 1}\right] = \left[\frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k - 1}\right]$。

由上，无论 p_n 与其相邻的下一个素数 p_{n+1} 是否在同一个台阶，恒有：

$$d = p_{n+1} - p_n \leqslant \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,) - 1}\right] = \left[\frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k - 1}\right]$$

成立。即从 p_n 到 $p_{n+1} = p_n + d \leqslant p_n + \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,) - 1}\right]$之间至少存在 1 个素数。证毕。

推论 3(估算素数间隙的显示公式 2)　设 $p_n(p_n \geqslant 11)$ 表示第 n 个素数，则估计 p_n 与 p_{n+1} 的最大素数间隙 d 满足：

$$d \leqslant \ln^2 p_n \tag{6}$$

证明　设 $d = p_{n+1} - p_n$。根据素数定理及素数分布定理有 $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$，$\pi(x) \approx xf(xe,)$，从而 $f(xe,) \approx \frac{1}{\ln x}$。又 $df(xe,) \approx 1$，故$\frac{d}{\ln x} \approx 1$；又 $p_n \geqslant 11$ 为第 n 个素数，显然有 $\ln x \gg 1$。于是$\frac{d}{\ln x} \leqslant \ln x$，即 $d \leqslant \ln^2 x$。取 $x = p_n$ 即有 $d \leqslant \ln^2 p_n$。

推论 4　素数个数是无限的。

证明　用反证法证明。

1) 利用推论 2 证明。假设素数共有 n 个，即素数个数是有限的，最大的素数为 $p_n \in T_k$。根据推论 2，取 $p_n + d \leqslant p_n + \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,) - 1}\right]$，则 p_n 到 $p_n + \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,) - 1}\right]$之间至少还有 1 个素数，即素数至少有 $n+1$ 个，这与假设矛盾。因此推论 4 成立。

2) 利用推论 3 证明。假设素数共有 n 个，即素数个数是有限的，最大的素数为 p_n。根据推论 3，则 p_n 到 $p_n + \ln^2 p_n$ 之间至少还有 1 个素数，即素数至少有 $n+1$ 个。这与假设矛盾。因此推论 4 成立。

3 算　　例

例 1　已知第 217 个素数为 1327，试估计与 $p_{n+1} = p_{218}$ 的素数间隙。

解　$x = p_n = p_{217} = 1327$，可知 $p(xe,) = 47$，$f(xe,1) = 0.136087034$。利用式(5)：

$$d = \left[\frac{1}{f(xe,1)} + \frac{p_n}{p(xe,) - 1}\right] = \left[\frac{1}{0.136087034} + \frac{1327}{47 - 1}\right] = [36.20] = 36$$

即从 $p_n = 1327$ 到 $p_{n+1} \leqslant p_n + d = 1327 + 36 = 1363$ 之间至少存在 1 个素数。实际上从素数 1327 到自然数 1363 之间只有 1 个素数 1361。

由文献[2]有 $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{\frac{6}{11}} = 1327^{\frac{6}{11}} \approx 51$。利用式(6)有：$p_{n+1} - p_n = d \leqslant \ln^2 1327 \approx 51.71$。

例 2　已知第 2850174 个素数为 47326693，试估计与其相邻的下一个素数的间隙。

解　$x = p_n = p_{2850174} = 47326693$，可知 $p(xe,) = 2291$，$f(xe,1) = 0.05658184171$。根据公式(5)：

万方数据

$$d=\left[\frac{1}{f(xe,1)}+\frac{p_n}{p(xe,)-1}\right]=\left[\frac{1}{0.05658184171}+\frac{47326693}{2291-1}\right]=[2352.72]=2352$$

即从 $p_n=47326693$ 到 $p_{n+1}\leqslant p_n+d=47326693+2352=47329045$ 之间至少存在 1 个素数。实际上从素数 47326693 到自然数 47329045 之间有 125 个素数。第 2850174 个素数 47326693 的下一个素数为 47326913。这是 100000000 内最大的素数间隙。

由文献[2] 有 $p_{n+1}-p_n\ll p_n^{\frac{6}{11}}=47326693^{\frac{6}{11}}\approx 15361$。利用式(6)，不大于 47326693 的最大素数间隙 $d\leqslant \ln^2 47326693\approx 312$。

显然，利用文献[2] 估算素数间隙，不如利用公式(6) 更接近实际，而且 p_n 越大效果越明显。而利用式(5)则效果更好。

[参考文献]

[1]潘承洞，潘承彪．解析数论基础[M]．北京：科学出版社，1997. 675～676.
[2]Guy R K. 数论中未解决的问题[M]．第 2 版．张明尧 译．北京：科学出版社，2004. 30～32.
[3]许作铭，罗贵文．素数分布的三组递推公式及其应用[J]．沈阳师范大学学报(自然科学版)，2006，(4)：388～391.
[4]许作铭，闫俐，罗贵文．估算 $D(x)$ 的一个显示公式[J]．重庆工学院学报(自然科学版)，2007，(12)：72～75.
[5]许作铭，计算素数个数的一个新公式[A]．王运开，张涛．科技创新与和谐社会建设[C]．沈阳：辽宁科学技术出版社，2007. 675～680.
[6]潘承洞，潘承彪，素数定理的初等证明[M]．上海：科学技术出版社，1998. 35～37.
[7]同济大学数学教研室主编、高等数学[M]．北京：高等教育出版社，1996. 64～71.
[8]欧阳光中，姚允龙，数学分析[M]．上海：复旦大学出版社，1991. 92～97.

[编辑]　洪云飞

(上接第 2 页)

又 $\beta_k^{DY}=\frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^T(g_k-g_{k-1})}=\frac{g_k^Td_k}{g_{k-1}^Td_{k-1}}$，于是 $\|d_k\|^2\leqslant -\|g_k\|^2-2g_k^Td_{k-1}+\left(\frac{g_k^Td_k}{g_{k-1}^Td_{k-1}}\right)^2\|d_{k-1}\|^2$。两端除以 $(g_k^Td_k)^2$ 得：

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^Td_k)^2}\leqslant\frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^Td_{k-1})^2}-\frac{\|g_k\|^2}{(g_k^Td_k)^2}-\frac{2}{g_k^Td_k}=\frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^Td_{k-1})^2}-\left(\frac{\|g_k\|}{g_k^Td_k}+\frac{1}{\|g_k\|}\right)^2+\frac{1}{\|g_k\|}$$

即：

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^Td_k)^2}\leqslant\frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^Td_{k-1})^2}+\frac{1}{\|g_k\|}$$

又 $\frac{\|d_1\|^2}{(g_1^Td_1)^2}=\frac{1}{\|g_1\|^2}$，递推得 $\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^Td_k)^2}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\|g_i\|}$。

假设定理 1 不成立，则存在 $c>0$，使得：

$$\|g_k\|^2>c\qquad\forall k=1,2,\cdots$$

则 $\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^Td_k)^2}\leqslant\frac{k}{c}$，即有 $\frac{(g_k^Td_k)^2}{\|d_k\|^2}\geqslant\frac{c}{k}$，从而得 $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(g_k^Td_k)^2}{\|d_k\|^2}=+\infty$。这与引理 3 矛盾。故定理 1 成立。

[参考文献]

[1]Al-baali M. Descent property and global convergence of the Fletcher-Reeves method with inexact line search[J]. SIMA J Numer Anal, 1985,(5):121～124.
[2]Gilbert J C, Nocedal J. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization[J]. SIAM J Optimization, 1992, 2(1):21～42.
[3]Dai Y H, Yuan Y X. A nonlinear conjugate methods with a strong global convergence property[J]. SIAM J Optimization, 1999, 10(1):177～182.
[4]戴志锋陈兰平．一种混合的 HS-DY 共轭梯度法[J]．计算数学，2005，27(4)：429～436.

[编辑]　洪云飞

万方数据

万方数据 WANFANG DATA 文献链接

估算素数间隙的一个公式

作者： 许作铭， 闫俐， 罗贵文， 许作良， XU Zuo-ming， YAN Li， LUO Gui-wen， XU Zuo-liang

作者单位： 许作铭,罗贵文,XU Zuo-ming,LUO Gui-wen(辽宁大学数学学院,辽宁,沈阳,110036)， 闫俐,许作良,YAN Li,XU Zuo-liang(中国人民大学信息学院,北京,100872)

刊名： 长江大学学报A（自然科学版）

英文刊名： JOURNAL OF YANGTZE UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)

年，卷(期)： 2008,5(2)

参考文献(8条)

1. 潘承洞;潘承彪 解析数论基础 1997

2. Guy R K;张明尧 数论中未解决的问题 2004

3. 许作铭;罗贵文 素数分布的三组递推公式及其应用[期刊论文]-沈阳师范大学学报(自然科学版) 2006(04)

4. 许作铭;闫俐;罗贵文 估算D(x)的一个显示公式[期刊论文]-重庆工学院学报 2007(12)

5. 许作铭 计算素数个数的一个新公式 2007

6. 潘承洞;潘承彪 素数定理的初等证明 1998

7. 同济大学数学教研室 高等数学 1996

8. 欧阳光中;姚允龙 数学分析 1991

本文读者也读过(10条)

1. 许作铭.闫俐.罗贵文.XU Zuo-ming.YAN Li.LUO Gui-wen 估算D(x)的一个显示公式[期刊论文]-重庆工学院学报（自然科学版）2007,21(12)

2. 陈国兴 哥德巴赫猜想"1+1"证明[期刊论文]-科技咨询导报2007(27)

3. 张春山 关于偶数分拆的几个结果[期刊论文]-大庆石油学院学报2004,28(5)

4. 许作铭.罗贵文.XU Zuo-ming.LUO Gui-wen 素数分布的三组递推公式及其应用[期刊论文]-沈阳师范大学学报（自然科学版）2006,24(4)

5. 高明生 数学史上的十四个难题[期刊论文]-中学数学杂志(高中版)2008(2)

6. 杨锡亮.杨爱华.程国福 东营市棉花生产可持续发展的制约因素与对策[期刊论文]-中国种业2007(2)

7. 鲁思顺.Lu Sishun 加强含量筛法与哥德巴赫猜想证明的探索[期刊论文]-延安教育学院学报2001(2)

8. 杨仕椿 关于n/3的第一类好表法[期刊论文]-贵州师范大学学报(自然科学版)2003,21(1)

9. 程林凤.CHENG Lin-feng 一个和单位分数有关的不定方程的解[期刊论文]-大学数学2006,22(4)

10. 陆帼英 灾害性天气对阿克苏地区棉花生产的影响[期刊论文]-新疆气象2003,26(4)

本文链接：http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_cjdxxb-rkxb200802004.aspx